相対論的統計熱力学

物性研　中嶋貞雄

（10月15日受理）

§1. 序　　論

H. Ott[1] が Planck の相対論的熱力学[2]を批判，修正してこのかた，このふるい問題が多くのひとの注目をひいた[3]。議論の多くは現象論的な古典熱力学の立場からなされ，これが混乱の一因となっている。

最近 Balescu[4] は，彼と Kotera[5] の手になる相対論的 kinetic theory から熱力学をみちびこうとした。これは，ボルツマン方程式の特解として，マックスエル分布をみちびくことに相当する。しかし，はじめから熱平衡系に話をかぎることにすれば，Gibbs の立場をとることもできるわけである。つまり，いわゆる statistical thermodynamics を相対論的な系にまで拡張するのである。このやり方の利点は，すべての熱力学的関係式を，あいまいさなしに，演繹的にみちびきうることである。

もともと，対象とする力学系が相対論的であろうとなかろうと，統計熱力学の基本原理は次のふたつである。話をはっきりさせるよう，量子的系にかぎる。すると

1. 系の統計分布は密度マトリックス ρ で表され，力学変数 A の平均値は次の公式であたえられる。

$$< A > = T_r(\rho A) \qquad (1.1)$$

2. 熱平衡系はエントロピー S が最大という条件で特徴づけられる。ただし

$$S = - T_r(\rho \ log \ \rho) \qquad (1.2)$$

このノートでは，以上ふたつの原理を，量子化された場に適用する。もっとも，熱力学の諸公式をみちびくかぎりでは，場の量子論のごく形式的な部分を利用するにすぎない。たとえば発散の困難は，相互作用のある場について

熱力学的諸量を計算しようとするとき，はじめて問題になる。場の量子統計力学は宇宙進化のある段階を論ずるばあいに有用とおもわれるが，これもべつの機会に論じる。

§2. 密度マトリックスの不変性

以下一貫してハイゼンベルク表示で考える。すると，場は四次元時空の各点 $x_n = (\vec{x}, it)$ で定義された一組のオペレータ $\phi_\alpha(x)$ で記述される（以下 $c = 1$，$\hbar = 1$ とする）。他方，系の統計的分布は x_n に無関係な密度マトリックス ρ であらわされる。ロレンツ変換によってある慣性系からべつの慣性系に移ると，場はあたらしいオペレータ ϕ_α' で記述される。恒等変換に連続的につながる変換に話をかぎるとして，無限小変換

$$x_n' = x_n + \varepsilon_n + \varepsilon_{nm} x_m \qquad (2.1)$$

を考えよう。このとき

$$\phi_\alpha'(x) = U\, \phi_\alpha(x)\, U^{-1} \qquad (2.2)$$

$$U = 1 + i\, \varepsilon_n P_n + i\, \varepsilon_{nm} M_{nm} \qquad (2.3)$$

ただし，P_n，M_{nm} は系のエネルギー・運動量ベクトルおよび角運動量テンソルをあらわすオペレータである。

ロレンツ変換に際し，場のオペレータはユニタリ変換（2.2）を受けるのにたいし，密度マトリックス ρ は不変であり，平均（1.1）は力学変数 A とおなじ共変性を示す。ρ が不変であるから，エントロピー（1.2）も不変であり，熱運動の乱雑さはロレンツ不変な概念ということになる。

Balescu − Kotera[5] は古典力学系を相空間で記述し，ロレンツ変換は相空間に正準変換を誘起すると考えた。このような正準変換の存在を示すことに，かなりな努力をはらっているのである。他方，ユニタリ変換（2.3）の存在は，場の量子論の基本的な要請のひとつであり，これ以上議論する必要はあるまい。

§3. カノニカル分布

エントロピー最大の原理を適用するにあたり，副条件

$$T_r(\rho) = 1 \quad \cdots\cdots (3.1)$$

はつねにみたさねばならぬ。このほかにどんな副条件を加えるかにより，実質的には同等な，いくつかの熱平衡分布がえられる。以下カノニカル分布で考えるのが便利である。これは副条件

$$T_r(\rho\, P_n) = \langle P_n \rangle \quad \text{given} \quad \cdots\cdots (3.2)$$

によって特徴づけられる。(3.1)，(3.2) のもとでエントロピー (1.2) を最大にするのは

$$\rho = \exp\left[\, \Omega + \beta_n P_n \right] \quad \cdots\cdots (3.3)$$

ρが不変であるから，Ωはスカラ，β_n はベクトルである。(3.3) を (3.1) に代入して，Ω が β_n の関数としてきまり，(3.2) により，

$$\langle P_n \rangle = -\,\partial\Omega / \partial\beta_n \quad \cdots\cdots (3.4)$$

また (3.3) を (1.2) に代入して

$$S = -\,\Omega - \beta_n \langle P_n \rangle \quad \cdots\cdots (3.5)$$

(3.4)，(3.5) から

$$\beta_n = -\,\partial S / \partial \langle P_n \rangle \quad \cdots\cdots (3.6)$$

分布 (3.3) が有界であるためには，β_n は時間性のベクトルでなければならず，慣性系 K_0 を適当にえらんで $(0, 0, 0, i/T_0)$ の形になる。この K_0 に関する P_n の第四成分を iH とかくと，ふつうのカノニカル分布

$$\rho = \exp\left[\, \Omega - (H/T_0)\right] \quad \cdots\cdots (3.7)$$

がえられる。つまり，系は K_0 にたいしマクロな意味で静止しているのであり，その固有温度が $T_0 > 0$，静止エネルギーは

$$E_0 = T_r\,(\rho H) \qquad \cdots\cdots (3.8)$$

一般の慣性系Kに移り，これにたいして K_0 が速度 $\vec{v}$ で動いているとすると

$$\beta_n = \left(\frac{\vec{v}}{T_0\sqrt{1-v^2}} \;,\; \frac{i}{T_0\sqrt{1-v^2}} \right) \qquad \cdots\cdots (3.9)$$

$\vec{v}$ は系が全体としておこなう併進運動の速度にほかならない。

§4. 熱力学変数のえらび方

相対論的熱力学では，熱力学変数のえらび方によって，さまざまな温度があらわれる。以下 $\langle P_n \rangle = (\vec{\mathrm{G}},\ i\,\mathrm{E})$ とかこう。$\vec{\mathrm{G}}$ は系のマクロな運動量，Eはマクロなエネルギーである。以下簡単のため，外力の働いていない系を考える。すると，$\vec{G}$，E は静止エネルギー（3.8）と次のようにむすばれる。

$$E = E_0 \,/\, \sqrt{1-v^2} \qquad \cdots\cdots (4.1)$$

$$\vec{G} = \vec{v}\,E_0 \,/\, \sqrt{1-v^2} \qquad \cdots\cdots (4.2)$$

さて，$\vec{G}$，E を熱力学変数にえらぶと，（3.6），（3.9）により

$$\frac{1}{T_{\mathrm{G}}} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{\vec{\mathrm{G}}} \;,\qquad \frac{\vec{v}}{T_{\mathrm{G}}} = -\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{\mathrm{G}}}\right)_{\mathrm{E}} \qquad \cdots\cdots (4.3)$$

ここに

$$T_{\mathrm{G}} = T_0\,\sqrt{1-v^2} \qquad \cdots\cdots (4.4)$$

は Planck の導入した温度[2]である。これにたいし，E，$\vec{v}$ を熱力学変数にえらぶと，

$$dS = \frac{1}{T_v}\left\{ dE - d\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right\} \qquad \cdots\cdots (4.5)$$

ここに T_v は Ott の導入した温度[1]であり

$$\frac{1}{T_v} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{\vec{v}} = \frac{\sqrt{1-v^2}}{T_0} \quad \cdots\cdots (4.6)$$

ところでエントロピーはスカラなのであるから，静止系で（3.7）から計算してもよい。するとSは静止エネルギー（3.8）の関数であり，たとえば$\vec{v}$は余計な変数のようにみえる。しかし，E_0の変動はエネルギー・運動量保存則によって制約されており，このことを考えに入れようとすると$\vec{v}$あるいは$\vec{G}$が登場してくる。いずれにしろ，E_0，$\vec{v}$を熱力学変数にとると

$$\frac{1}{T_0} = \left(\frac{\partial S}{\partial E_0}\right)_{\vec{v}}, \qquad 0 = \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{v}}\right)_{E_0} \quad \cdots\cdots (4.7)$$

§5. 熱 接 触

非相対論的統計熱力学のばあい，温度，熱，熱源の諸概念は，ふたつのマクロな系の熱接触を考察することによって導入される。これを相対論的に拡張しよう。

ふたつのマクロな部分系a，bからできた系を考える。はじめ部分系の間に相互作用がなく，部分系はそれぞれ平衡状態にあるとする。部分系の間に弱い相互作用を導入し，エネルギー・運動量の交換をゆるすと，一般には変化がおこり，やがて全系が熱平衡に達する。エントロピー最大の原理により，このとき全系のエントロピーが減少することはありえない：

$$\Delta S_a + \Delta S_b \geqq 0 \quad \cdots\cdots (5.1)$$

この第二法則に加えて，第一法則

$$\Delta E_a + \Delta E_b = 0 \quad \cdots\cdots (5.2)$$

$$\Delta \vec{G}_a + \Delta \vec{G}_b = 0 \quad \cdots\cdots (5.3)$$

がある。エネルギー・運動量の変化は小さいとし，（4.3）を利用して（5.1）を次のようにかく。

$$\left(\frac{1}{T_{Ga}}-\frac{1}{T_{Gb}}\right)\Delta E_a-\left(\frac{\vec{v}_a}{T_{Ga}}-\frac{\vec{v}_b}{T_{Gb}}\right)\cdot\Delta\vec{G}_a\geqq 0 \qquad (5.4)$$

等号は系がはじめから熱平衡にあるときに成立つ。そのとき，状態変化は可逆的である。一般には ΔE_a と $\Delta\vec{G}_a$ とは独立であるから，熱平衡が成立つためには，それぞれの係数が（5.4）において0でなければならぬ。よって

$$T_{0a}=T_{0b},\qquad \vec{v}_a=\vec{v}_b \qquad (5.5)$$

ところで非相対論のばあい，接触しているふたつの部分系の温度の大小は，エネルギーの流れる方向をきめる。（5.4）のばあい，エネルギー・運動量の変化をもっと具体的に規定しないと，そのような結論をひき出せない。いいかえると，（5.4）はふつう熱接触とよばれているもの以外のプロセスをもふくんでいるのである。そこであらためて，熱接触とは，各部分系のマクロな速度がそれぞれ不変であるようなプロセスである，と定義しよう。

$$\Delta\vec{v}_a=\Delta\vec{v}_b=0 \qquad (5.6)$$

この条件はロレンツ不変な概念であることに注意しておこう。また，（5.6）が成立つとき，運動量保存則（5.3）は $\vec{v}_a\,\Delta E_a+\vec{v}_b\,\Delta E_b=0$ とかけるので，（5.2）とあわせて，$\vec{v}_a=\vec{v}_b$ がえられる。つまり，平衡条件（5.5)の半分はすでにみたされていることになる。ふたつの部分系は同一の静止系をもち，この静止系の観測者からみれば，プロセスはふつうの熱接触そのものである。したがって，この観測者はただちにふつうの第二法測を次のように書き下すであろう。

$$\left(\frac{1}{T_{0a}}-\frac{1}{T_{0b}}\right)\Delta E_{0a}\geqq 0 \qquad (5.7)$$

他方，（5.6）が成立つとき，（5.4）は

$$\left(\frac{1}{T_{va}}-\frac{1}{T_{vb}}\right)\Delta E_a\geqq 0 \qquad (5.8)$$

つまり，エネルギーはオット温度 T_v の高い系から低い系へ流れることにな

る。これは一見すると新しい結論のようにみえるが，そうではない。(5.8) はふつうの第二法則 (5.7) 以上の情報をふくんでいるわけではないのである。実際，(5.6) のもとでは

$$\Delta E_a = \Delta E_{0a} / \sqrt{1-v^2} \quad \cdots\cdots (5.9)$$

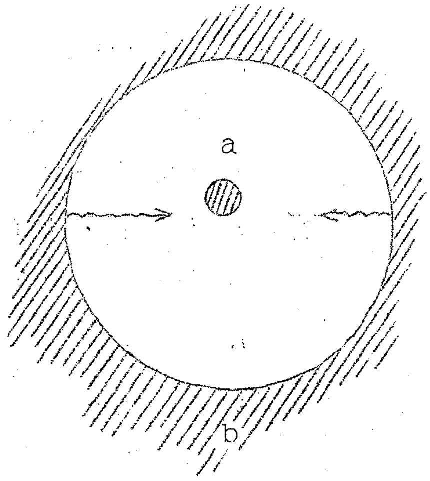
これを (5.8) に代入して (5.7) がえられる。

もしある慣性系でみて部分系の間のマクロな運動量の交換が禁じられているなら，プランク温度 T_G の大小が，エネルギーの流れの方向を決めることになる；

$$\Delta\vec{G}_a = -\Delta\vec{G}_b = 0 \quad \cdots\cdots (5.10)$$

しかし，この条件はそもそもロレンツ不変な概念でない。また一般には，部分系の少なくも一方は条件 (5.10) のもとでのエネルギー交換によってマクロな速度を変える。つまり，このばあいのエネルギー変化は，全部がランダムな熱運動に帰着するわけではない。

(5.10) の非現実的であることをみるには，Ott の思考実験をとるとよい。物体 a が，大きな空洞の壁 b にたいして，速度 v で動いており，b の放出した 2 ケの光子を a が吸収するとしよう。その際，2 ケの光子は b の静止系 K_b でみて，大きさひとしく反対むきの運動量をもつとする。つまり K_b で (5.10) が成立つことになり，このプロセスによって事実エネルギーが b から a へ流れるためには



第 1 図

$$T_{0a}\sqrt{1-v^2} \leqq T_{0b} \quad \cdots\cdots (5.11)$$

Ott[1] 自身は，これを $T_{0a} \leqq T_{vb}$ と解釈しているが，それは好みの問題にすぎない。とにかく，a の放出した 2 ケの光子を b が吸収するという，逆プロセスを考えてみよう。これについても (5.10) が成立つとすると，a の放出する 2 ケの光子は b の静止系 K_b でみて反対むきの運動量をもつことになり，

これはすこぶる不自然な仮定というべきである。

このように，プランク温度が温度という名まえにふさわしい役割を演じうる場面はほとんどないのである。

§6. オット温度の意義

われわれは熱接触を（5.6）で定義した。このときのエネルギー変化 $\varDelta E_a$ を，熱接触によってbからaに流れた熱量と定義しよう。すると熱はオットの変換（5.9）にしたがい，オット温度 T_v の高い系から低い系へと流れる。われわれの立場からみると，これらの結論はむしろトリビヤルである。オット温度の本当の意義は，相対速度をもつふたつの系の間のエネルギー変換を問題にするとき，はじめてあきらかになる。これをみるには，まずオット・サイクルという概念を導入する必要がある。

ある慣性系 K にたいして静止した系があるとする。これをまず可逆断熱的に速度 v にまで加速する。つまり静止エネルギー（3.8）を一定に保って系全体として加速するのであって，（4.7）によりエントロピーは一定である。次に速度 v で動いている熱源 R に接触させて，可逆的に熱量を R から系に移す。ふたたび可逆断熱的に減速して静止させ，今度は静止した熱源 Q に接触させて，可逆的に熱量を系から Q に移し，系自身ははじめの状態にもどるとする。これがオット・サイクル[1)]である。あきらかに，熱源 R，Q との接触でおこる静止エネルギーの変化は，大きさひとしく符号が反対であるから，これを $\pm\varDelta E_0$ とかこう。すると，第二法則により，R と Q とはおなじ固有温度をもっていることがわかる。

$$-(\varDelta E_0/T_{0R})+(\varDelta E_0/T_{0Q})=0 \qquad \text{(6.1)}$$

また，熱源 R から吸収した熱量は，これを慣性系 K からみると

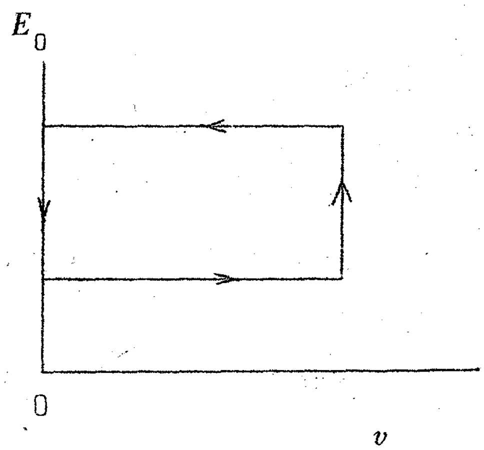
$$\varDelta E=\varDelta E_0/\sqrt{1-v^2} \qquad \text{(6.2)}$$

熱源 Q に与えた熱量との差 $\varDelta E_0-\varDelta E$ は，加速および減速に際し，外力のなした仕事にひとしい。

オット・サイクルは逆むきに運転してもよい。いずれにしろ，これは固有

温度がひとしく，速度のことなる熱源の間に働く熱機関である。

さて，上述のオット・サイクルを一周期運転したところで，今度は系にふつうのカルノー・サイクルをやらせる。つまり，熱源Qから熱量$\varDelta E_0$を吸収し，べつの静止した熱源Q'に，べつの熱量$\varDelta E_0'$をあたえる。しかるのち，ふたたびオット・サイクルを今度は逆むきに運転して，熱源Q'から熱量$\varDelta E_0'$をうばい，速度v'で動いている熱源R'に熱量



第２図　オット・サイクル

$$\varDelta E' = \varDelta E_0' / \sqrt{1-v'^2} \quad \cdots\cdots (6.3)$$

を与える。このばあい，全過程を通じて外力のなす仕事の総和がゼロになるよう$\varDelta E_0'$をえらぶとしよう。すると，第一法則により$\varDelta E = \varDelta E'$であり，これに（6.2），（6.3）を代入して

$$(\varDelta E_0' / \varDelta E_0) = \sqrt{1-v'^2} / \sqrt{1-v^2} \quad \cdots\cdots (6.4)$$

また，カルノー・サイクルの部分に第二法則を適用して

$$(\varDelta E_0' / \varDelta E_0) = (T_{0Q'} / T_{0Q}) = (T_{0R'} / T_{0R}) \quad \cdots\cdots (6.5)$$

（6.4），（6.5）から

$$\frac{T_{0R}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{T_{0R'}}{\sqrt{1-v'^2}} \quad \cdots\cdots (6.6)$$

つまり，互に相対運動している系の一方から他方へ，可逆的に，しかも力学的仕事を消費することなくエネルギーを輸送できるためには，ふたつの系のオット温度がひとしくなければならない[1]。これが，オット温度のもつ本当の意義である。統計熱力学の立場からすると，Ott のえた結論の大部分は，ほとんどトリビヤルな関係なのであるが，（6.6）は自明とはいえない。だか

ら，（6.6）をみちびいたことが，Ottの最も重要な貢献と考えられる。

§7. 空洞輻射

具体例として，相互作用のないスカラ粒子の集まりを考える。ただし粒子の静止質量はゼロとする。したがってこれは，一時論争の的となった空洞輻射の問題[3)]とみてよい。統計熱力学は，この問題にたいしても，もちろんあいまいさのない回答をあたえる。

系は大きい空洞にとじこめられているとして，

$$\beta_n P_n = \sum_{\vec{k}} \frac{(\vec{v}.\vec{k} - k)}{T_0\sqrt{1-v^2}} n(\vec{k}) \qquad (7.1)$$

とかこう。占領数 $n(\vec{k})$ およびその統計平均はスカラである。カノニカル分布（3.3）は次の平均をあたえる。

$$< n(\vec{k}) > = \left[\exp\left\{ \frac{(k - \vec{v}.\vec{k})}{T_0\sqrt{1-v^2}} \right\} - 1 \right]^{-1} \qquad (7.2)$$

これは，直観的に予想するとおり，温度 T_0 で，周波数がドップラー・シフトしたプランク分布である。

エネルギー・運動量をもとめるために，まずエネルギー・運動量テンソル T_{nm} の平均値をもとめよう。これは空洞の体積にはよらない。スカラ場にたいするよくしられた表式により

$$\left.\begin{aligned} < T_{11} > &= \int d^3\vec{k}\ k_\chi^2 < n(\vec{k}) > \\ < T_{44} > &= -\int d^3\vec{k}\ k\ < n(\vec{k}) > \\ < T_{14} > &= i\int d^3\vec{k}\, k_\chi < n(\vec{k}) > \end{aligned}\right\} \qquad (7.3)$$

ただし，$\vec{v}$ の方向に χ 軸をとった。（7.2）を（7.3）に代入して積分を実行することは容易である。おなじ結果は，いうまでもなく，静止系での表式

$$\left.\begin{aligned} \langle T_{11}^{0}\rangle &= \frac{1}{3}\alpha\, T_0^{4}\ (\equiv p), \\ -\langle T_{44}^{0}\rangle &= \alpha\, T_0^{4}\ (\equiv \varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots (7.4)$$

からロレンツ変換によってもえられる。ただし，αはステファン定数の半分にひとしい。いずれにしろ

$$\left.\begin{aligned} \langle T_{11}\rangle &= (p+v^2\varepsilon)/(1-v^2) \\ -\langle T_{44}\rangle &= (\varepsilon+v^2 p)/(1-v^2) \\ -i\langle T_{14}\rangle &= v(\varepsilon+p)/(1-v^2) \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots (7.5)$$

さて，エネルギー・運動量は

$$\langle P_n\rangle_\sigma = \int_\sigma d\sigma_m \langle T_{mn}\rangle \quad\cdots\cdots\cdots (7.6)$$

であたえられる。ただしσは四次元時空の三次元超曲面，$d\sigma_m$はその面素片ベクトルである。系が有限な体積にとじこめられ，その表面で$\langle T_{mn}\rangle$がゼロでないために，(7.6)は曲面σのえらび方に依存する。たとえば，静止系K_0の観測者からみると，法線がK_0の時間軸と一致する超平面$\sigma^{(0)}$をえらぶのが自然であろう。すると$d\sigma_m^{(0)} = (0,\ 0,\ 0,\ -i\,dV_0)$となる。ただし$dV_0$は固有体積$V_0$の素方である。(7.6)は静止エネルギー

$$E_0 = V_0\,\varepsilon \quad\cdots\cdots\cdots (7.7)$$

をあたえる。

次に，慣性系K_0が速度$\vec{v}$で動いているような一般の慣性系Kに移る。Kにおけるエネルギー・運動量を定義するのに，まえとおなじ超平面$\sigma^{(0)}$をとれば，(7.6)はもちろんベクトルとして変換される。あるいは，Kからみて

$$d\sigma_m^{(0)} = \left(\frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}\,dV_0,\ 0,\ 0,\ \frac{-i}{\sqrt{1-v^2}}\,dV_0\right)$$

であることに注意すれば，(7.5)，(7.6) から，直接

$$E = \frac{V_0 \varepsilon}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2}} \quad \cdots\cdots (7.8)$$

をみちびくこともできる。したがって前節までにのべた議論は，(7.6) の σ をたとえば超平面 $\sigma^{(0)}$ に固定しておく，という約束のもとで，そのままつかえる。

しかし，慣性系 K のエネルギー・運動量を定義するのに $\sigma^{(0)}$ をつかうのはいかにも不自然である。ふつうは，法線が K の時間軸と一致する超平面 $\sigma^{(1)}$ をとる。すると (7.6) の第四成分は，次のエネルギーを与える；

$$E^{*} = V\varepsilon = \frac{V_0(\varepsilon + v^2 p)}{\sqrt{1-v^2}} \quad \cdots\cdots (7.9)$$

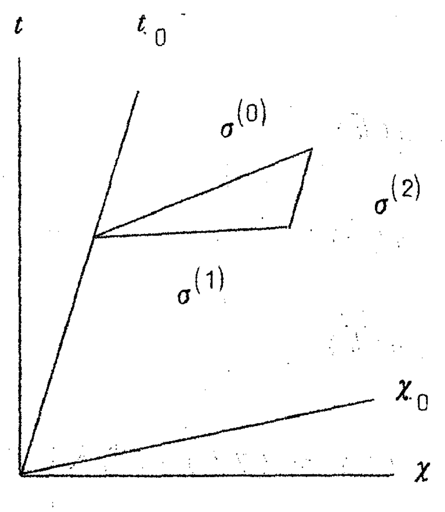
ここに $V = V_0\sqrt{1-v^2}$ は K 系の観測者の見る空洞の体積である。差 $E^{*} - E$ は，第3図に示した超平面 $\sigma^{(2)}$ からの寄与である。つまり

$$\langle P_n \rangle_{\sigma^{(0)}} = \langle P_n \rangle_{\sigma^{(1)}} + \langle P_n \rangle_{\sigma^{(2)}}$$

この差の物理的意味をみるには，微分をとってみるとよい。その際，固有体積 V_0，速度 v は一定に保っておくとする。すると (7.8)，(7.9) から

$$dE^{*} - dE = \frac{v^2 V_0\, dp}{\sqrt{1-v^2}} \quad (7.10)$$

Møller[3)] が示したように，右辺は空洞の体積を一定に保つために加えられている外力のなす力学的仕事であって，同時刻概念が相対化するためにあらわれてくる。たとえば空洞は軸が χ 軸に



第 3 図

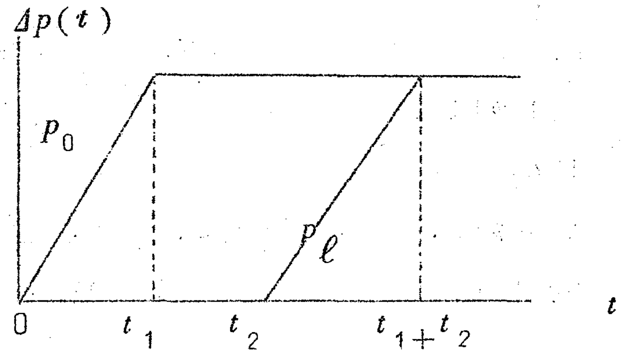
平行な円筒形で断面積はF，静止系K_0でみた底面は$\chi_0 = 0$，$\chi_0 = \ell$であるとしよう。K_0系でみて圧力pが

$$\Delta p(t_0) = \begin{cases} 0, & t_0 < 0 \\ (\Delta p/\tau), & 0 < t_0 < \tau \\ 0, & t_0 > \tau \end{cases}$$

だけ増したとしよう。K_0系でみれば，左右の底面に働く力は各瞬間に釣合っているが，これをK系でみると，第4図のように左右の圧力にアンバランスがある。図において

$$t_1 = \frac{v\ell}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$t_2 = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2}}$$



第 4 図

であることに注意しておこう。外力のなす仕事は

$$A = F\int_0^{t_1+t_2} \Delta p(t)\ v\,dt = \frac{F\Delta p}{\tau}\ v\sqrt{1-v^2}\quad t_1 t_2$$

$$= \frac{(F\ell)v^2}{\sqrt{1-v^2}}\,\Delta p$$

であって，(7.10) の右辺と一致する。

結局，もし慣性系KからみたエネルギーをE^*と考えるばあいには，たとえ体積が一定におさえられているとしても，(7.10) だけの力学的仕事がなされることを考えに入れることが必要である。この意味で (7.8) はむしろ熱関数とよんだほうがよい。

文　献

1) H. Ott, Z. f. Phys. <u>175</u>, 70, 1963

2) たとえば, W. Pauli, Relativitätstheorie, 693, 1921

3) H. Arzèliès, Nuovo Cimento <u>35</u>, 792, 1965; <u>41B</u>, 81, 1966

A. Gamba, Nuovo Cimento <u>37</u>, 1792, 1965; <u>41B</u>, 72, 1966

T, W. B. Kibble, Nuovo Cimento <u>41B</u>, 72, 83, 84, 1966

F. Rohrlich, Nuovo Cimento <u>45B</u>, 76, 1966

L. de Broglie, Compt. Rend. <u>262B</u>, 1235, 1966

C. Møller, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. <u>36</u>, 1, 1967

A. Børs, Proc. Phys. Soc. <u>86</u>, 1141, 1965

P. T. Landsberg, Proc. Phys, Soc. <u>89</u>, 1007, 1966

N. G. Van Kampen, Proc. Intn, Conf. Statistical Mechanics, Kyoto, 1968

4) R. Balescu, Proc. Intn. Conf. Statistical Mechanics, Kyoto, 1968.

5) R. Balescu and T. Kotera, Physica <u>33</u>, 558, 1967